

Kapitola 1

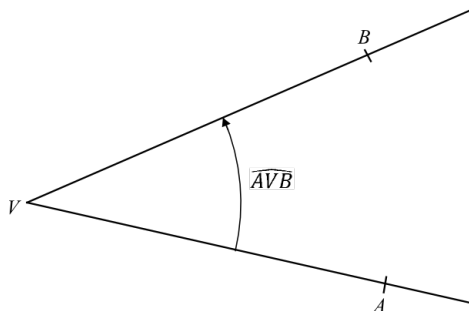
Goniometrické funkce

1.1 Funkce sinus, kosinus

Před zavedením funkcí sinus a kosinus nejprve objasníme následující pojmy.

Před samotným zavedením funkcí *sinus* a *kosinus* objasníme pojem **orientovaný úhel**. Orientovaným úhlem v rovině rozumíme uspořádanou dvojici polopřímek se společným počátkem.

Konkrétní ukázkou orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$ vidíme na obrázku 1.1.

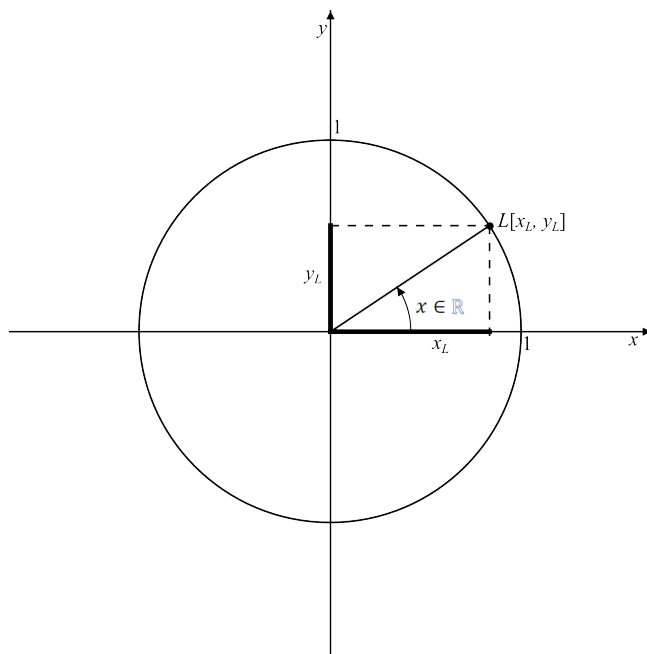


Obrázek 1.1: Orientovaný úhel AVB s počátečním ramenem VA a s koncovým ramenem VB se značí $\widehat{AVB}$

DEFINICE 1.1. Funkce **sinus** se nazývá funkce na množině $\mathbb{R}$, která

každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí právě jedno $y_L \in \mathbb{R}$.

DEFINICE 1.2. Funkce **kosinus** se nazývá funkce na množině $\mathbb{R}$, která každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí právě jedno $x_L \in \mathbb{R}$.



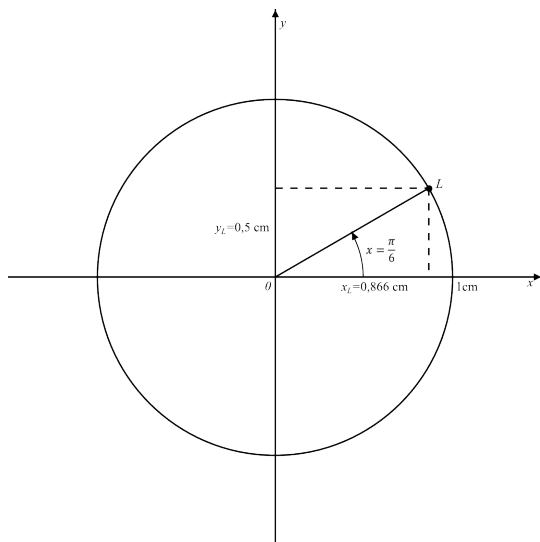
Obrázek 1.2: Grafické znázornění funkcí *sinus* a *kosinus*

Z obrázku 1.2. je tedy zřejmé, že $x_L \in \mathbb{R}$ je první souřadnice bodu L na koncovém rameni orientovaného úhlu x a $y_L \in \mathbb{R}$ je druhá souřadnice bodu L na koncovém rameni orientovaného úhlu x .

POZNÁMKA 1.1. První souřadnici bodu L nazýváme **kosinus** x a značíme $\cos x$.

POZNÁMKA 1.2. Druhou souřadnici bodu L nazýváme **sinus** x a značíme $\sin x$.

PŘÍKLAD 1.1. Mějme daný orientovaný úhel $x = \frac{\pi}{6} \in \mathbb{R}$, ($x = 30^\circ$ v míře stupňové). Chceme určit $\cos x$ a $\sin x$ na základě výše uvedené definice, a pomocí obrázku 1.2. Začneme nejprve jednotkovou kružnicí.



Obrázek 1.3: Grafické určení $\cos x$ a $\sin x$ pro $x = \frac{\pi}{6}$

Do jednotkové kružnice o poloměru 1 cm pomocí úhломěru vyznačíme orientovaný úhel $x = \frac{\pi}{6} \in \mathbb{R}$, ($x = 30^\circ$ v míře stupňové), jak vidíme na obrázku 1.3. Z bodu L nanese kolmice na osu x a osu y , tím dostaneme úsečky, jejichž délka odpovídá $\cos x$ a $\sin x$ pro $x = \frac{\pi}{6}$. Příslušné délky změříme a porovnáme je s tabelovanými hodnotami. Závěr: $\cos x \doteq 0,87$ a $\sin x = 0,5$ pro $x = \frac{\pi}{6}$.

Na základě DEF. 1.1. a DEF. 1.2. a z informací o orientovaném úhlu můžeme vyvodit následující identity:

- $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$
- $\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$, kde $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

POZNÁMKA 1.2. Zpředchozích dvou identit vyplývá, že funkce $\cos x$ a $\sin x$ jsou funkce periodické s periodou $2 \cdot \pi$.

Na základě DEF. 1.1., DEF. 1.2. a s použitím PŘ. 1.1. můžeme vyjádřit hodnoty funkce $\cos x$ a $\sin x$ pro libolný úhel $x \in \mathbb{R}$. Například pro úhel $x = 0 \in \mathbb{R}$, ($x = 0^\circ$ vychází $\cos x = 1$ a $\sin x = 0$). Pro úhel $x = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$, ($x = 90^\circ$ vychází $\cos x = 0$ a $\sin x = 1$). Tímto způsobem můžeme určit hodnoty $\cos x$ a $\sin x$ pro libovolný úhel $x \in \mathbb{R}$.

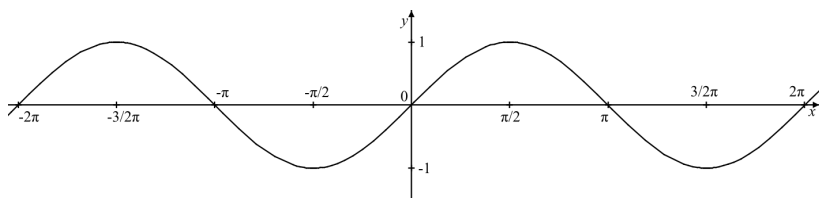
V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty $\cos x$ a $\sin x$ pro některé typické úhly.

Tabulka 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot pro základní výrokové formule

$x(^{\circ})$	0	30	45	60	90	180	270	360
$x(\text{rad})$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$	0	-1	0
$\cos x$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$	-1	0	1

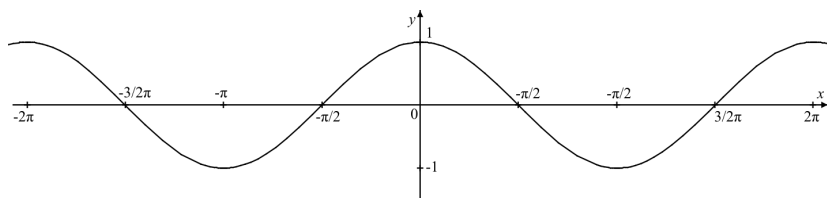
1.2 Grafy funkce sinus, kosinus

Grafem funkce $y = \sin x$ je křivka zvaná **sinusoida**.



Obrázek 1.4: Graf funkce $y = \sin x$

Grafem funkce $y = \cos x$ je křivka zvaná **kosinusoida**.



Obrázek 1.5: Graf funkce $y = \cos x$

Pro goniometrickou funkci danou DEF. 1.1. existují 3 základní rozšíření:

1. Pro funkci $y = \sin(x + b)$, kde $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ je grafem sinusoida, která vznikne posunem funkce $y = \sin x$ o hodnotu b ve směru osy x
2. Pro funkci $y = \sin x + b = b + \sin x$, kde $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ je grafem sinusoida, která vznikne posunem funkce $y = \sin x$ o hodnotu b ve směru osy y
3. Pro funkci $y = \sin b \cdot x$, kde $b \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge b \neq 1$ je grafem sinusoida, jejíž perioda se změní b -krát oproti periodě funkce $y = \sin x$.

POZNÁMKA 1.3. Pro funkci $y = \cos x$ jsou 3 základní rozšíření grafu analogická.

POZNÁMKA 1.4. Platí:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \forall x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k=\mathbb{Z}} \left\{ (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \forall x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k=\mathbb{Z}} \{k \cdot \pi\}.$$

Symbol $\operatorname{tg} x$ čteme **tangens** x , symbol $\operatorname{cotg} x$ čteme **kotangens** x .

Těmito definičními vztahy je každému přípustnému $x \in \mathbb{R}$ přiřazeno právě jedno reálné číslo $\operatorname{tg} x$ a právě jedno reálné číslo $\operatorname{cotg} x$, tedy tyto vztahy udávají funkční předpisy **funkce tangens** $f : y = \operatorname{tg} x$ a **funkce kotangens** $f : y = \operatorname{cotg} x$.

POZNÁMKA 1.5. Jako příklad goniometrické funkce z DEF. 1.1. nebo DEF. 1.2., která popisuje ve fyzice konkrétní děj, můžeme uvést funkci:

- $y = y_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, kde y označuje okamžitou výchylku kmitajícího hmotného bodu, y_m označuje amplitudu výchylky kmitajícího hmotného bodu, ω označuje úhlovou frekvenci a φ_0 označuje poštětní fázi kmitavého pohybu. Tato funkce vyjadřuje závislost okamžité výchylky na čase při netlumeném kmitavém pohybu hmotného bodu
- Goniometrické funkce dále vystupují například při hledání řešení diferenciální vlnové rovnice, a to v mechanice, v teorii elektromagnetického pole a v kvantové mechanice.