

Kapitola 1

Exponenciální a logaritmické funkce

1.1 Exponenciální funkce

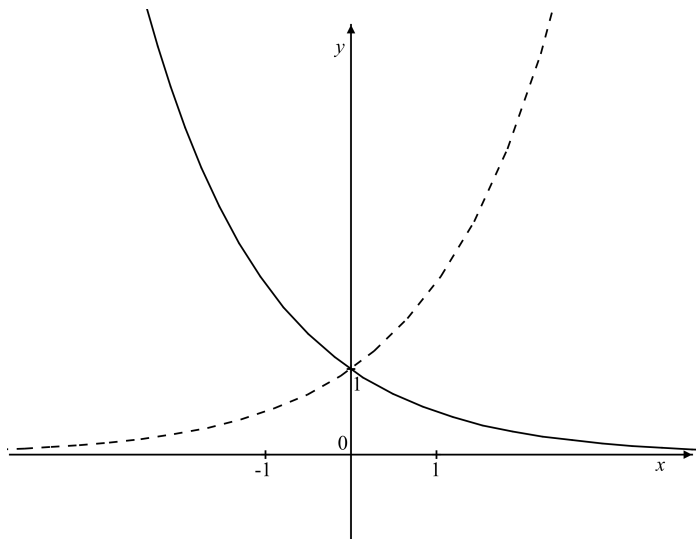
DEFINICE 1.1. Exponenciální funkce o základu a je každá funkce na množině $\mathbb{R}$, která je dána předpisem $y = a^x$, kde $a \neq 1, a > 0, a \in \mathbb{R}$.

Podmínka $a \neq 1, a > 0$ z definice 1.1. je nutná, protože mocnina a^x je $\forall x \in \mathbb{R}$ definována jen pro $a > 0$. Grafem každé exponenciální funkce je křivka zvaná **exponenciála**.

POZNÁMKA 1.1. Speciální, nejčastěji užívaná exponenciální funkce je funkce $y = e^x$, kde e je Eulerovo číslo. Jeho přibližná hodnota zakrouhlená na 4 platné cifry je 2,718. Tato funkce má velmi významnou roli jak v matematice, tak ve fyzice.

Graf exponenciální funkce z DEF. 1.1. rozdělíme do dvou případů:

1. Na obrázku 1.1. vidíme graf exponenciální funkce $y = a^x$, kde $0 < a < 1$ (v obrázku plnou čarou)
2. Na obrázku 1.1. vidíme graf exponenciální funkce $y = a^x$, kde $a > 1$ (v obrázku čárkovaně).



Obrázek 1.1: Graf exponenciální funkce $y = a^x$

Pro exponenciální funkci danou DEF. 1.1. existují 2 základní rozšíření:

1. Pro funkci $y = a^x + b$, kde $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ je grafem exponenciála, která vznikne posunem funkce $y = a^x$ o hodnotu b ve směru osy y
2. Pro funkci $y = a^{x+b}$, kde $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ je grafem exponenciála, která vznikne posunem funkce $y = a^x$ o hodnotu b ve směru osy x .

POZNÁMKA 1.2. Jako příklad exponenciální funkce z POZ. 1.1., která popisuje ve fyzice konkrétní děj, můžeme uvést funkce:

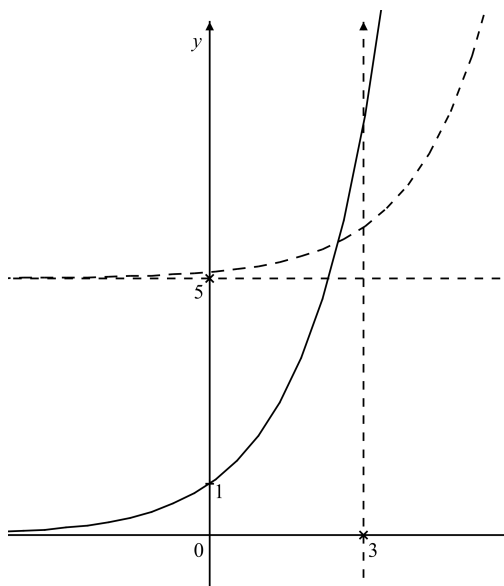
- $I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot d}$, kde I označuje intenzitu světla po průchodu světla prostředím o tloušťce d , I_0 označuje počáteční intenzitu světla, β je absorpční koeficient. Tato funkce vyjadřuje pokles intenzity světla I při průchodu světla materiálem o tloušťce d
- $p = p_0 \cdot e^{-K \cdot \Delta h}$, $K = \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0}$, kde p označuje atmosférický tlak v obecné výšce h , p_0 označuje normální atmosférický tlak, $\rho_0 = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ označuje normální hustotu vzduchu, g označuje

tíhové zrychlení, $\Delta h = h - h_0$. Tato funkce vyjadřuje pokles atmosférického tlaku p s nadmořskou výškou h .

PŘÍKLAD 1.1. Chceme načrtnout graf funkce $y = 2^{x-3} + 5$. Začneme nejprve grafem funkce $y = 2^x$, v obrázku 1.2. nečárkovaná exponenciála. K načrtu tohoto grafu zvolíme několik bodů např.

x	-2	-1	0	1	2
y	0,25	0,5	1	2	4

Dále můžeme postupovat tak, že graf funkce $y = 2^x$ posuneme o 5 ve směru kladné osy y a o 3 ve směru kladné osy x . Dostaneme tak výsledný graf funkce $y = 2^{x-3} + 5$, v obrázku čárkovaná exponenciála.



Obrázek 1.2: Graf exponenciální funkce $y = 2^{x-3} + 5$

1.2 Logaritmická funkce

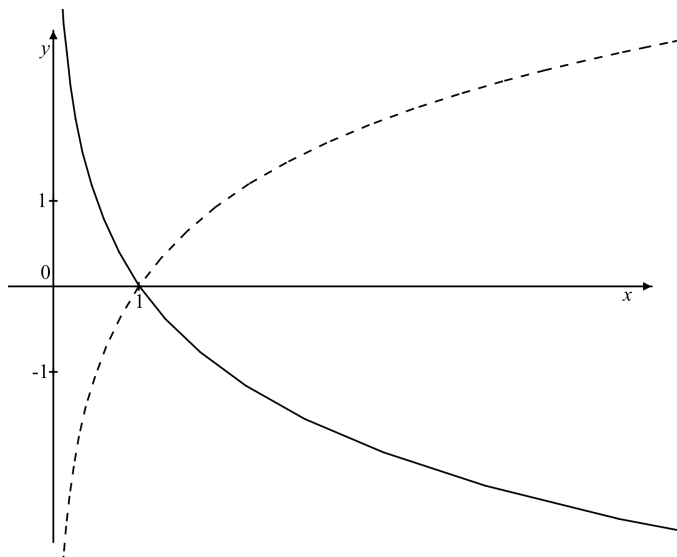
Inverzní funkce k funkci $f(x)$, definované v DEF. 1.1., je předpis, který ke každému reálnému číslu y přiřadí právě jeden prvek x z množiny A . Tedy zjednodušeně řečeno, inverzní funkce přiřazuje prvky „opačným směrem“ než původní funkce.

DEFINICE 1.2. Logaritmická funkce o základu a je funkce, která je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$, kde $a \neq 1, a > 0, a \in \mathbb{R}$.

Užijeme zavedeného pojmu „inverzní funkce“ na funkci $y = a^x$, dostaneme funkci $x = a^y$, což je tedy matematické vyjádření logaritmické funkce (inverzní funkce k exponenciální funkci). Pro tuto funkci zavedeme speciální označení $y = \log_a x$, čteme „logaritmus x o základu a “.

POZNÁMKA 1.3. Speciální, v praxi často užívaná, logaritmická funkce je funkce $y = \log_e x$, kterou označujeme $y = \ln x$ a nazýváme „přirozený logaritmus x “.

Graf logaritmické funkce z DEF. 1.2. rozdělíme do dvou případů:



Obrázek 1.3: Graf logaritmické funkce $y = \log_a x$

1. Na obrázku 1.3. vidíme graf logaritmické funkce $y = \log_a x$, kde $0 < a < 1$ (v obrázku plnou čarou)
2. Na obrázku 1.3. vidíme graf logaritmické funkce $y = \log_a x$, kde $a > 1$ (v obrázku čárkovaně).

Pro logaritmickou funkci danou DEF. 1.2. existují 2 základní rozšíření:

1. Pro funkci $y = \log_a x + b = b + \log_a x$, kde $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ je grafem křivka, která vznikne posunem funkce $y = \log_a x$ o hodnotu b ve směru osy y
2. Pro funkci $y = \log_a(x + b)$, kde $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ je grafem křivka, která vznikne posunem funkce $y = \log_a x$ o hodnotu b ve směru osy x .

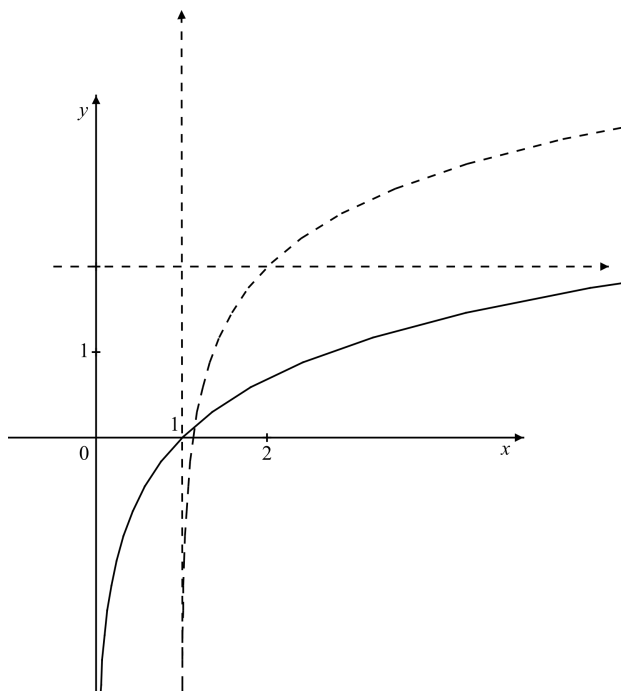
POZNÁMKA 1.4. Jako příklad logaritmické funkce, která popisuje ve fyzice konkrétní děj, můžeme uvést funkce:

- $S = K \cdot \ln W$, kde $k = 1,38 \cdot 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ je Boltzmannova konstanta a W je násobnost konfigurace. Tato funkce vyjadřuje růst entropie S dané konfigurace v závislosti n a násobnosti W stavů dané konfigurace.
- $v = C \cdot \ln \frac{p}{p_0}$, kde v označuje změnu fyziologického subjektivního vjemu, C je konstanta, p označuje fyzikální příčinu podnětu, p_0 označuje referenční hodnotu fyzikální příčiny podnětu. Tato funkce vyjadřuje závislost mezi velikostí podnětu (fyzikální příčiny) a velikostí fyziologického vjemu.

PŘÍKLAD 1.2. Chceme načrtnout graf funkce $y = 2 + \ln(x - 1)$. Začneme nejprve grafem funkce $y = \ln x$, v obrázku nečárkovaná křivka. K načrtu tohoto grafu zvolíme několik bodů např.

x	0,1	1	10
y	-1	0	1

Dále můžeme postupovat tak, že graf funkce $y = \ln x$ posuneme o 2 ve směru kladné osy y a o 1 ve směru kladné osy x . Dostaneme tak výsledný graf funkce $y = 2 + \ln(x - 1)$, v obrázku 1.4. čárkovaná křivka.



Obrázek 1.4: Graf logaritmické funkce $y = 2 + \ln(x - 1)$