

Kapitola 1

Základní funkce

DEFINICE 1.1. Funkce f na množině $A \subset \mathbb{R}$ je předpis, který ke každému prvku x z množiny A přiřadí právě jedno reálné číslo y .

POZNÁMKA 1.1. Funkci z předchozí definice přesněji nazýváme „reálná funkce jedné reálné proměnné“, my se však v této kapitole spokojíme s pojmem „funkce“.

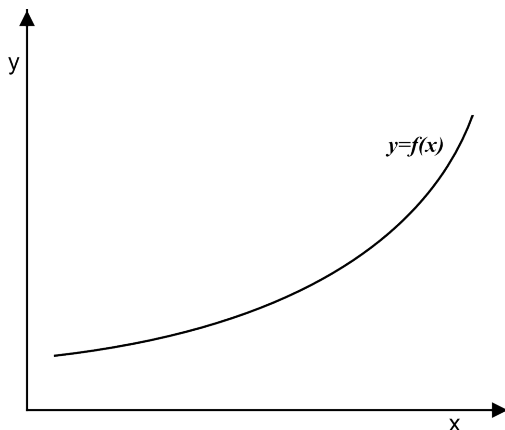
POZNÁMKA 1.2. Funkci obecně značíme $y = f(x)$, kde prvky $x \in A$ (nezávisle proměnné) označujeme jako argument funkce. Prvky $y \in R$ jsou pak závisle proměnné. Symbol f vyjadřuje konkrétní funkci.

Funkci můžeme obecně zadat jedním z následujících způsobů:

1. **analytickým předpisem:** rozumíme zadání funkce konkrétním předpisem $y = f(x)$, (př.: $y = \frac{x+3}{x^2+10}$, $y = x^2$, $y = \ln x$, ...)
2. **tabulkou:** rozumíme zadání funkce výčtem funkčních hodnot do tabulky (př.:

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

)
3. **graficky:** rozumíme zadání funkce do grafu funkce, tedy podmnožiny množiny $\mathbb{R}^2$ (př.: funkce zadaná graficky je na obrázku 1.1.).



Obrázek 1.1: Příklad funkce zadané pomocí grafu

POZNÁMKA 1.3. Všechny 3 způsoby zadání funkce jsou navzájem ekvivalentní, tedy každou reálnou funkci můžeme zadat všemi třemi způsoby.

1.1 Lineární funkce

DEFINICE 1.2. Lineární funkce je každá funkce na množině $\mathbb{R}$, která je dána předpisem $y = a \cdot x + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Speciálně když $a = 0$, pak $y = b$ a tuto funkci nazýváme **konstantní funkce**. Když $b = 0$, pak $y = a \cdot x$ a lineární funkci pak nazýváme **přímá úměrnost**.

POZNÁMKA 1.4. Obecně je grafem lineární funkce **přímka**.

Grafy jednotlivých typů lineárních funkcí jsou:

1. pro funkci $y = a \cdot x + b$, kde $a, b \neq 0$ je grafem přímka různoběžná s osami x, y
2. pro funkci $y = a \cdot x + b$, kde $a = 0, b \neq 0$, tedy pro funkci $y = b$ je grafem přímka rovnoběžná s osou x , procházející bodem o souřadnicích $[0, b]$
3. pro funkci $y = a \cdot x + b$, kde $b = 0, a \neq 0$, tedy pro funkci $y = a \cdot x$ je grafem přímka různoběžná s osami x, y , procházející bodem o souřadnicích $[0, 0]$ (počátkem soustavy souřadnic).

POZNÁMKA 1.5. Ke konstrukci grafu obecné lineární funkce stačí dva různé body.

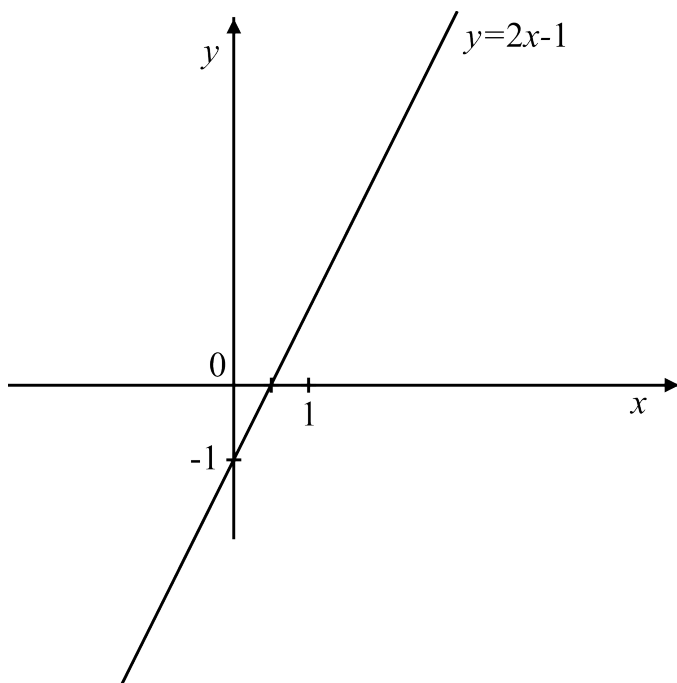
PŘÍKLAD 1.1. Chceme načrtnout graf funkce $y = 2 \cdot x - 1$. Protože k vytvoření grafu této funkce nám stačí 2 různé body, vyberem si tedy vhodné body o souřadnicích $[0, y_1]$, $[x_2, 0]$. Souřadnice y_1 a x_2 dopočítáme dosazením $x_1 = 0$ a $y_2 = 0$ do rovnice $y = 2 \cdot x - 1$.

Souřadnice obou bodů zapíšeme do tabulky

x	0	0,5
y	-1	0

.

Nyní vyneseme oba body z tabulky do soustavy souřadnic, a spojíme je přímkou. Tím získáme graf funkce $y = 2 \cdot x - 1$, jak jej vidíme na obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: Graf funkce $y = 2 \cdot x - 1$

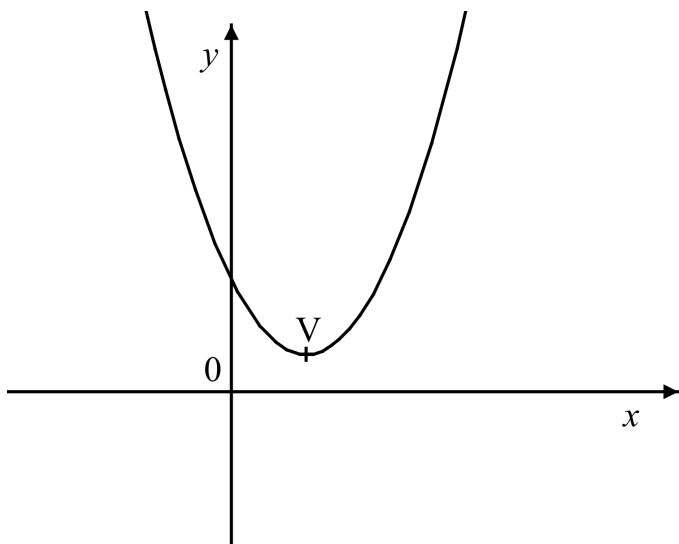
1.2 Kvadratická funkce

DEFINICE 1.3. Kvadratická funkce je každá funkce na množině $\mathbb{R}$, která je dána předpisem $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$.

Grafem každé kvadratické funkce je křivka zvaná **parabola**. Významným bodem každé paraboly je **vrchol paraboly-V**.

POZNÁMKA 1.6. Vrchol paraboly chápeme jako průsečík osy paraboly a paraboly samotné. Po zvládnutí diferenciálního počtu se dozvíme, že vrchol paraboly je její lokální extrém.

K jednoznačnému určení paraboly a k náčrtu grafu nám již 2 různé body nestačí. K přibližné konstrukci grafu kvadratické funkce je užitečné určit vrchol paraboly a průsečíky s osami x , y . Graf obecné kvadratické funkce vidíme na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: Graf obecné kvadratické funkce

Grafy jednotlivých typů kvadratických funkcí jsou:

1. pro funkci $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $b, c = 0$; $a \neq 0$, tedy pro funkci $y = a \cdot x^2$ je grafem parabola s vrcholem V o souřadnicích $[0, 0]$ souměrná podle osy y

2. pro funkci $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $b = 0$; $a, c \neq 0$, tedy pro funkci $y = a \cdot x^2 + c$ je grafem parabola s vrcholem V o souřadnicích $[0, c]$, která vznikne z paraboly $y = a \cdot x^2$ posunutím ve směru osy y (je-li $c > 0$ posunutí ve směru kladné osy y , je-li $c < 0$ posunutí ve směru záporné osy y)
3. pro funkci $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, kde $a, b, c \neq 0$ je grafem parabola s vrcholem V , jehož souřadnice určíme postupem zvaným „doplnění na úplný čtverec“, což můžeme vyjádřit následujícím matematickým postupem:

$$\begin{aligned}
 y &= a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x \right) + c = \\
 &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 \right) - a \cdot \frac{b^2}{4 \cdot a^2} + c = \\
 &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4 \cdot a} \right),
 \end{aligned}$$

vrchol V má tedy následující souřadnice $\left[-\frac{b}{2 \cdot a}, c - \frac{b^2}{4 \cdot a} \right]$.

PŘÍKLAD 1.2. Chceme načrtnout graf funkce $y = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1$. Nejprve určíme souřadnice vrcholu paraboly V a průsečíky s osami x, y . Tyto body nám postačí k jednoznačnému určení paraboly a k načrtnutí grafu.

Souřadnice vrcholu V určíme metodou „doplnění na úplný čtverec“, konkrétně takto:

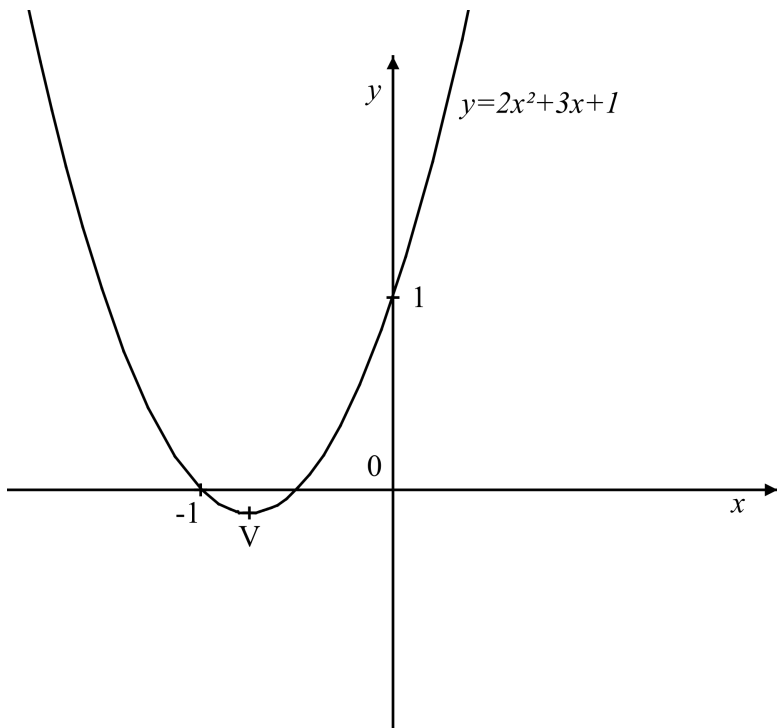
$$\begin{aligned}
 y &= 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1 = 2 \cdot \left(x^2 + \frac{3}{2} \cdot x + \left(\frac{3}{4} \right)^2 \right) - 2 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 + 1 = \\
 &= 2 \cdot \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{8} + 1 = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

Souřadnice vrcholu V tedy jsou $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{8} \right]$. Zbývá nám určit průsečíky s osou x a s osou y . Průsečík s osou x má y -ovou souřadnici rovnou 0, proto průsečík s osou x dostaneme řešením rovnice $0 = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1$. Řešením této kvadratické rovnice jsou kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = -\frac{1}{2}$, tedy je zřejmé, že průsečíky s osou x jsou dva a mají souřadnice $[-1, 0]$ a $[-\frac{1}{2}, 0]$.

Průsečík s osou y má x -ovou souřadnici rovnu 0, proto průsečík s osou y dostaneme řešením rovnice $y = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 = 1$. Průsečík s osou y je jeden a má souřadnice $[0, 1]$. Souřadnice všech čtyř bodů zapíšeme do tabulky

x	-1	-0,75	-0,5	0
y	0	-0,125	0	1

. Nyní vyneseme body z tabulky do soustavy souřadnic, a načrtne jimi parabolu. Tím získáme graf funkce $y = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1$, jak jej vidíme na obrázku 1.4.



Obrázek 1.4: Graf kvadratické funkce $y = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1$

DEFINICE 1.4. Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem je každá funkce na množině $\mathbb{R}$, která je dána předpisem $y = a \cdot x^n$, kde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$; $n \in \mathbb{N}$.

POZNÁMKA 1.7. Pro $n = 2$ dostáváme funkci $y = a \cdot x^2$, tedy kvadratickou funkci.

POZNÁMKA 1.8. Grafem každé mocninné funkce s přirozeným moc-

nitelem je křivka zvaná **parabola n-tého stupně**.

POZNÁMKA 1.9. Je-li n v definici mocninné funkce menší než nula ($n < 0, n \in \mathbb{Z}$), pak platí následující identita:

$$y = a \cdot x^n = a \cdot x^{-m} = \frac{a}{x^m}, m = -n, m \in \mathbb{N}.$$

1.3 Lineární lomená funkce

DEFINICE 1.5. Nepřímá úměrnost je každá funkce na množině $\mathbb{R} - \{0\}$, která je dána předpisem $y = \frac{k}{x}$, kde $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Grafem každé funkce nepřímá úměrnost je křivka zvaná **hyperbola**. Významným bodem každé nepřímé úměrnosti je bod o souřadnicích $[0, 0]$, který můžeme označit jako tzv. „bod nespojitosti“.

POZNÁMKA 1.10. Zmíněný „bod nespojitosti“ chápeme jako průsečík dvou na sebe kolmých přímk, v tomto případě průsečík osy x a y . Těchto dvou přímk se daná hyperbola nedotkne v žádném bodě.

K přibližné konstrukci grafu nepřímé úměrnosti nám postačí znalost hodnoty k , které nám určí jak orientaci hyperboly, tak její „průhyb“.

Graf obecné funkce nepřímá úměrnost vidíme na obrázku 1.5.

Funkci $y = \frac{k}{x}$ můžeme rozšířit o reálnou konstantu následujícími dvěma způsoby:

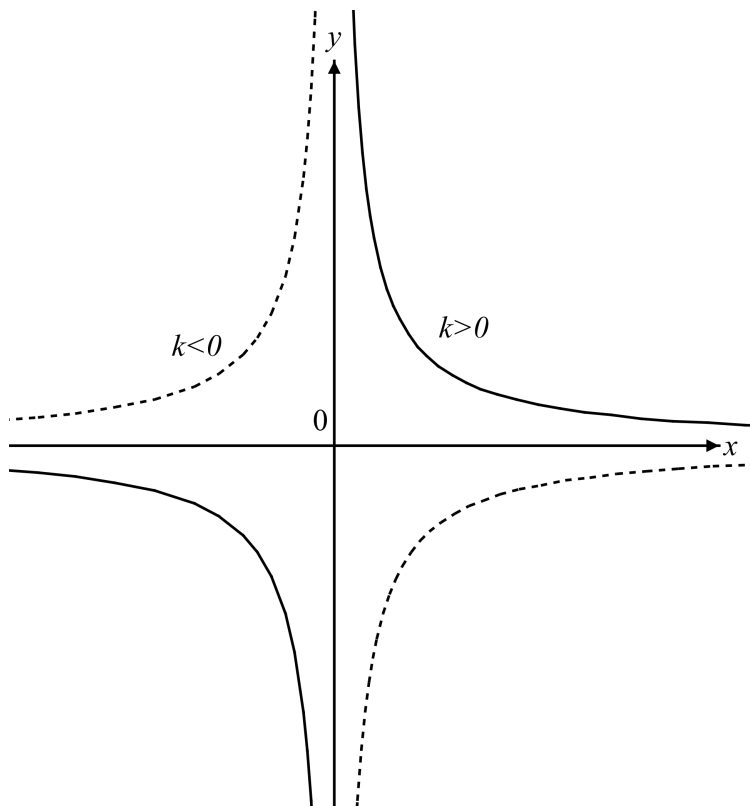
1. Funkce $y = \frac{k}{x} + q$, kde $k, q \in \mathbb{R} - \{0\}$. Grafem této funkce je opět hyperbola, která vznikne posunem funkce $y = \frac{k}{x}$ o hodnotu q ve směru osy y
2. Funkce $y = \frac{k}{x+q}$, kde $k, q \in \mathbb{R} - \{0\}$. Grafem této funkce je opět hyperbola, která vznikne posunem funkce $y = \frac{k}{x}$ o hodnotu q ve směru osy x .

POZNÁMKA 1.11. Pro funkci $y = \frac{k}{x} + q$ se změní souřadnice „bodu nespojitosti“ z $[0, 0]$ na souřadnice $[0, q]$. Pro funkci $y = \frac{k}{x+q}$ se změní souřadnice „bodu nespojitosti“ z $[0, 0]$ na souřadnice $[q, 0]$.

DEFINICE 1.6. Lineární lomená funkce je každá funkce na množině

$\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$, která je dána předpisem $y = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} = \frac{\frac{a}{c} \cdot x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{m \cdot x + n}{x + o}$,

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0$.



Obrázek 1.5: Graf obecné funkce nepřímá úměrnost

POZNÁMKA 1.12. V DEF. 1.6. musí být splněno $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$.

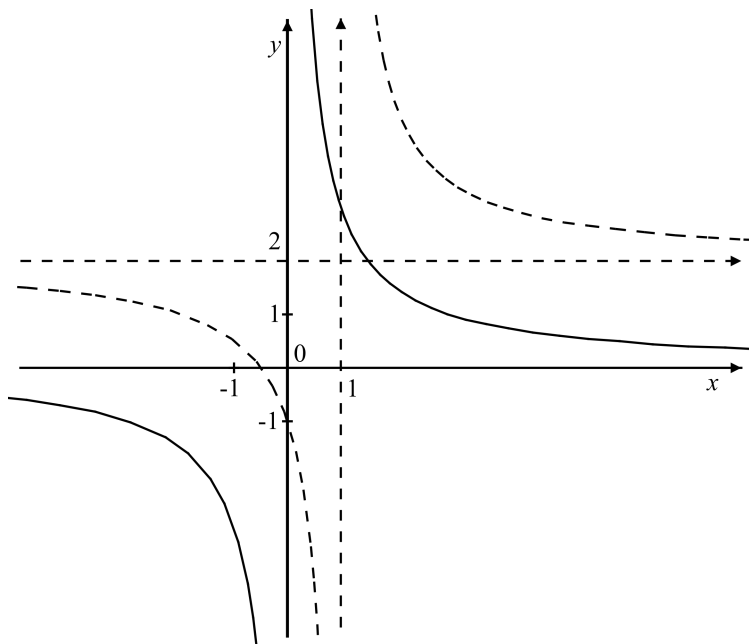
PŘÍKLAD 1.3. Chceme načrtnout graf funkce $y = \frac{2 \cdot x + 1}{x - 1}$. Zadanou funkci upravíme tak, abychom při náčrtu grafu mohli vycházet z nepřímé úměrnosti. Postupujeme tedy takto:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2 \cdot x + 1}{x - 1} = \frac{2 \cdot x + 1 - 2 + 2}{x - 1} = \frac{2 \cdot x - 2 + 3}{x - 1} = \\ &= \frac{2 \cdot -2}{x - 1} + \frac{3}{x - 1} = 2 + \frac{3}{x - 1}. \end{aligned}$$

Začneme tedy nejprve s grafem funkce $y = \frac{3}{x}$, v obrázku 1.6 čárkovaná hyperbola. K náčrtu tohoto grafu zvolíme několik bodů např.

x	-3	-1	1	3
y	-1	-3	3	1

Na základě předchozích výpočtů můžeme dále postupovat tak, že graf funkce $y = \frac{3}{x}$ posuneme o 2 ve směru kladné osy y a o 1 ve směru kladné osy x . Dostaneme tak výsledný graf funkce $y = \frac{2 \cdot x + 1}{x - 1}$, v obrázku 1.6 plná hyperbola.



Obrázek 1.6: Graf lineární lomené funkce $y = \frac{2 \cdot x + 1}{x - 1}$